

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА**  
**XVI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ**

**Национален кръг, 13 април 2013 г., Кърджали**

**Възрастова група XI-XII клас – теоретичен кръг – решения**

**1 задача. Решение:**

Отначало ще пресметнем радиусите на орбитите около общия център на масите на звездите  $r_A$  и  $r_B$ , както и този на планетата  $r_p$ . Означаваме масите на двете звезди с  $M_A$  и  $M_B$ , орбиталния период на двойната звездна система с  $T_{AB}$ , а орбиталния период на планетата с  $T_p$ . В сила са следните равенства:

$$r_A M_A = r_B M_B$$
$$\frac{(r_A + r_B)^3}{T_{AB}^2} = M_A + M_B$$

където орбиталните радиуси са изразени в астрономически единици, периодите – в земни години, а масите на звездите – в слънчеви маси. Решавайки тази система уравнения, за орбиталните радиуси получаваме:

$$r_B = \sqrt[3]{\frac{T_{AB}^2 M_A^3}{(M_A + M_B)^2}} \approx 0.1734 \text{ AU} \quad r_A = \sqrt[3]{\frac{T_{AB}^2 M_B^3}{(M_A + M_B)^2}} \approx 0.0509 \text{ AU}$$

Орбиталния радиус на планетата намираме също от III закон на Кеплер:

$$\frac{r_p^3}{T_p^2} = M_A + M_B$$
$$r_p = \sqrt[3]{T_p^2 (M_A + M_B)} \approx 0.7048 \text{ AU}$$

Тук отново орбиталният радиус е изразен в астрономически единици, периодът в земни години, а масите на звездите в слънчеви маси.

I случай. Оранжевата звезда е пред червената.

Тогава видимите от планетата ъглови диаметри  $\delta_A$  и  $\delta_B$  на оранжевата и на червената звезда ще бъдат:

$$\delta_A = \delta_o \frac{R_A}{r_p - r_A} \approx 0.5^\circ \approx 30'$$
$$\delta_B = \delta_o \frac{R_B}{r_p + r_B} \approx 0.13^\circ \approx 7.8'$$

В тези формули с  $R_A$  и  $R_B$  са означени радиусите на двете звезди в слънчеви радиуси (или което е все едно – диаметрите в слънчеви диаметри),  $\delta_o$  е видимият ъглов диаметър на нашето Слънце. По-малката компонента В очевидно ще бъде напълно закрита от по-голямата компонента А.

II случай. Червената звезда е пред оранжевата.

Тогава:

$$\delta'_A = \delta_o \frac{R_A}{r_p + r_A} \approx 0.43^\circ \approx 26.8'$$
$$\delta'_B = \delta_o \frac{R_B}{r_p - r_B} \approx 0.21^\circ \approx 12.6'$$

Поради обстоятелството, че разстоянието между двете звезди е само около три пъти по-малко от орбиталния радиус на планетата, видимите диаметри на звездите в разгледаните случаи съществено се различават.

Когато червеното слънце покрива, макар и частично оранжевото, на планетата би трябвало да е най-хладно. Тогава освен всичко друго, оранжевата звезда е малко по-далеч от

планетата. Но дали ефектът от закриването на част от видимия диск на по-горещата звезда от по-хладната не се компенсира от това, че по-хладната звезда тогава е доста по-близо до планетата, поради по-голямото си отстояние от центъра на масите? Наистина създаваната от нея осветеност се увеличава в сравнение със средното разстояние с фактор, който можем да оценим така:

$$\left( \frac{r_p}{r_p - r_B} \right)^2 \approx 1.76$$

Т.е. увеличението на блясъка на червената звезда е близо два пъти в сравнение със ситуация, когато тя е на някакво средно разстояние от планетата. Но нека пресметнем отношението на светимостите на двете звезди:

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{4\pi R_A^2 \sigma T_A^4}{4\pi R_B^2 \sigma T_B^4} \approx 40$$

където  $T_A$  и  $T_B$  са температурите на звездите, а  $\sigma$  е константата на Стефан-Болцман. Оранжевата звезда е около 40 пъти по-мощно светеща от червената. Лесно се убеждаваме, че определящ е блясъкът на оранжевата звезда. Следователно наистина в този случай на планетата е най-хладно, понеже видимият ъглов диаметър на червената звезда е половината от този на оранжевата, което означава, че една четвърт от видимия диск на оранжевата звезда е закрита.

Кога на планетата е по-топло – когато оранжевата звезда закрива червената, или когато се виждат и двете звезди? На пръв поглед може да ни се струва, че когато двете звезди не се закриват, те създават по-голяма осветеност върху планетата. Но нека не забравяме, че когато оранжевата звезда закрива червената, оранжевата звезда е малко по-близо до нас. Факторът, с който се усилва създаваната от нея осветеност е:

$$\left( \frac{r_p}{r_p - r_A} \right)^2 \approx 1.16$$

При покритие на червената звезда, оранжевата звезда създава с около 16% по-голяма осветеност в сравнение със ситуация, когато тя е на средно разстояние от планетата. Светимостта на оранжевата звезда е цели 40 пъти по-слаба от тази на оранжевата. Следователно загубата от светлината на червената звезда е значително по-малка от 16-процентната печалба от приближаването на оранжевата звезда към планетата. Оттук заключаваме, че най-топло на планетата ще бъде, когато оранжевата звезда закрива червената.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

*За определяне на орбиталните радиуси на звездите – 3 т.*

*За определяне на видимите ъглови размери в първия случай – 3 т.*

*За определяне на видимите ъглови размери във втория случай – 3 т.*

*За правилни разсъждения по въпроса от какво се определя осветеността, създавана върху планетата при различните случаи – 4 т.*

*За вярно заключение в кой случай е най-топло и в кой – най-хладно на планетата – 2 т.*

## **2 задача. Решение:**

Означаваме с  $r_0$  радиуса на земната орбита около Слънцето, а с  $r_A = r_0 - \Delta r$  радиуса на орбитата на станцията STEREO A ( $\Delta r = 5.58 \times 10^6$  км). Нека  $T_0$  е орбиталният период на Земята около Слънцето, а  $T_A$  – периодът на станцията. Съгласно III закон на Кеплер:

$$\frac{r_A^3}{T_A^2} = \frac{r_0^3}{T_0^2}$$

Оттук намираме орбиталния период на станцията STEREO A:

$$T_A = T_0 \sqrt{\left(\frac{r_A}{r_0}\right)^3} \approx 0.9446 \text{ години} \approx 345 \text{ дни}$$

Да разгледаме движението на станциите в координатна система, в която Земята е неподвижна. След старта те ще се отдалечават по орбитите си от Земята в две противоположни посоки. Тъй като изискването е да са отклонени на еднакви ъгли симетрично от двете страни на Земята, то след време те и двете ще се озоват на  $180^\circ$  от Земята, а след още толкова време ще се съберат отново близо до Земята. Това означава, че синодичните периоди на двете станции са еднакви. Да пресметнем синодичния период  $T_S$  на станцията STEREO A:

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_0}$$

$$T_S = \frac{T_0 T_A}{T_0 - T_A} \approx 17.0505 \text{ години}$$

Станцията STEREO B има същия синодичен период и следователно:

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_B}$$

където  $T_B$  е сидеричният период или истинският орбитален период на станцията STEREO B. Оттук пресмятаме:

$$T_B = \frac{T_S T_0}{T_S - T_0} \approx 1.0623 \text{ години} \approx 388 \text{ дни}$$

Интервалът от време, за който след старта двете станции ще се отдалечат на  $90^\circ$  от двете страни на Земята и ще могат да фотографират двете противоположни страни на Слънцето, е равен на една четвърт от синодичния период на станциите:

$$17.0505 / 4 \approx 4.26 \text{ години} \approx 4 \text{ год. } 95 \text{ дни} = 1556 \text{ дни}$$

Разглеждаме снимките на Слънцето, направени от двете станции STEREO и станцията SOHO. Забелязваме, че на снимката от SOHO активното образуване не е точно в центъра на видимия слънчев диск. Това много затруднява задачата, ако искаме да я решим точно, а приближенията чрез усредняване по измерванията върху двете снимки на станциите STEREO могат да дадат представа за височината на образуването, но биха били доста неточни. Компромисно решение е да изберем един детайл от активното образуване, който на снимката от SOHO се вижда точно в центъра на видимия слънчев диск, и да определим неговата височина.

Върху снимката STEREO A сме нанесли схема на измерването, като избраният детайл от образуването е заграден в кръгче. Измерваме диаметъра  $d$  на изображението на Слънцето в милиметри. По принцип трябва да измерим отстоянието  $a$  на изследвания детайл от центъра на видимия слънчев диск, но по-удобно и по-точно се измерват по-големи отсечки, затова измерваме отстоянието  $a'$ . В части от диаметъра на видимия слънчев диск за отстоянието на образуването от центъра получаваме:

$$a' = a + d/2$$

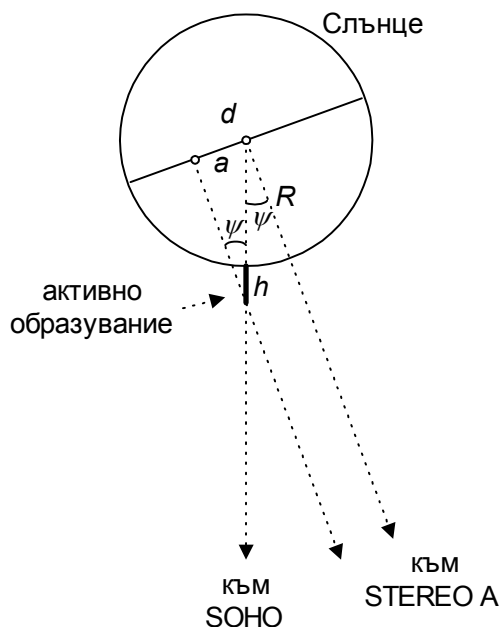
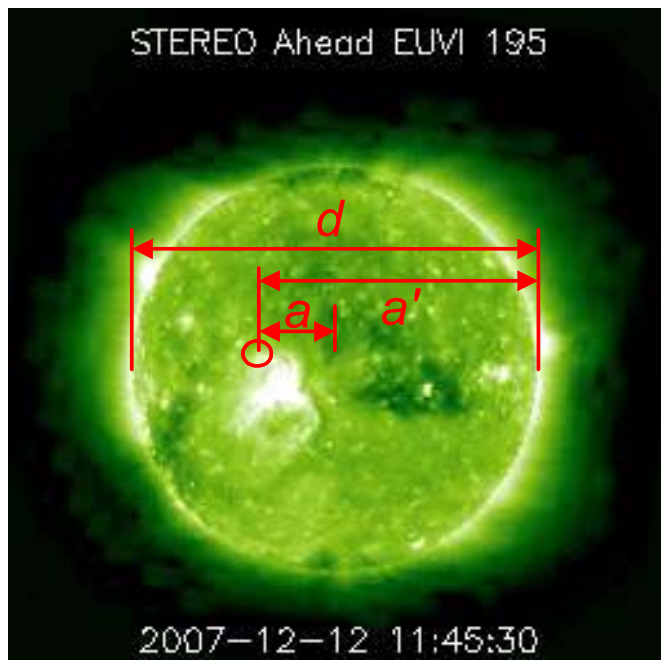
$$\frac{a}{d} = \frac{a'}{d} - \frac{1}{2}$$

За двете изображения получаваме съответно:

|          | $d$   | $a'$    | $a/d$  |
|----------|-------|---------|--------|
| STEREO A | 49 mm | 33.7 mm | 0.1917 |
| STEREO B | 48 mm | 33.5 mm | 0.1878 |

Пресмятаме средното аритметично на отношенията и получаваме  $a/d = 0.1929$ . Сега остава да го умножим по истинския диаметър на Слънцето, за да получим отстоянието  $a$  в километри:

$$a = 0.1929 \times 2 \times 696000 \text{ км} \approx 269000 \text{ км}$$



От чертежа вдясно се вижда, че има следната връзка между величината  $a$ , радиуса на Слънцето  $R$  и височината на активното образувание  $h$ :

$$\frac{a}{R + h} = \sin \psi$$

където  $\psi$  е ъгълът, на който станцията STEREO A отстои по орбитата си от Земята, респективно от линията Земя – Слънце, на която се намира станцията SOHO.

$$\psi = 42^\circ / 2 = 21^\circ$$

Оттук намираме:

$$h = \frac{a}{\sin \psi} - R$$

$$h \approx 53000 \text{ км}$$

Критерии за оценяване (общо 16 т.):

За намиране на орбиталния период на станцията STEREO A – 2 т.

За съобразяване, че двете станции имат еднакъв синодичен период и обяснение – 2 т.

За определяне на синодичния период – 2 т.

За пресмятане на орбиталния период на станцията STEREO B – 2 т.

За определяне кога станциите ще са от две противоположни страни на Слънцето – 2 т.

За измервания, определяне на мащаби по снимките и усредняване – 2 т.

За правилна математическа постановка на решението – 3 т.

За правилен числен резултат – 1 т.

### 3 задача. Решение:

Ще разгледаме движението на звездата в координатна система, относно която пулсарът е неподвижен. Да означим с  $a$  голямата полуос на относителната орбита, по която звездата се

движи около пулсара, намиращ се в един от фокусите на тази орбита. Ако зрителният лъч е перпендикулярен на апсидната линия, то за апоцентралното и перицентралното разстояние на звездата от пулсара получаваме:

$$r_p = 0.01'' \cdot 1000 pc = 10 \text{ AU}$$

$$r_a = 0.03 \cdot 1000 pc = 40 \text{ AU}$$

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = 25 \text{ AU}$$

Означаваме с  $M_s$  и  $M_p$  масите съответно на звездата и на пулсара, а с  $T$  – техния орбитален период. Съгласно III закон на Кеплер:

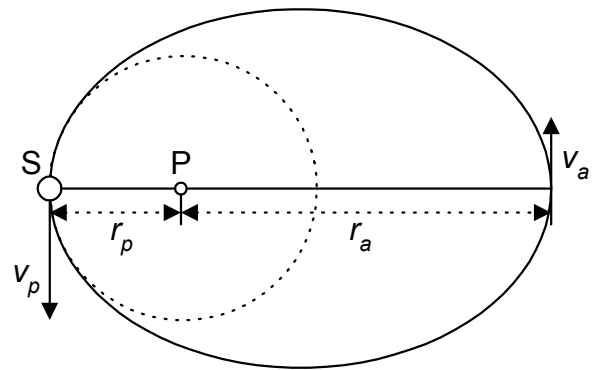
$$\frac{a^3}{T^2} = M_s + M_p$$

където голямата полуос е изразена в астрономически единици, периодът – в земни години, а масите – в слънчеви маси. Оттук за масата на пулсара получаваме:

$$M_p = \frac{a^3}{T^2} - M_s$$

$$M_p \approx 1.6 \text{ слънчеви маси}$$

На схемата с S е отбелязана звездата, с P – пулсарът, с  $v_p$  и  $v_a$  скоростите на движение на звездата по относителната орбита съответно в перицентра и апоцентра. С пунктирна линия е дадена кръговата орбита, по която се е движила звездата преди взривяването на свръхновата.



Първоначално звездата S е била по-леката компонента в двойната система. Пулсарът е остатък от по-масивната звезда, която е избухнала като свръхнова.

Тогава по-леката звезда S се е движила около по-тежката звезда със скорост, равна на  $v_p$  по кръгова орбита с радиус, равен на  $r_p$ . Първо ще определим тази скорост. Съгласно II закон на Кеплер:

$$v_p r_p = v_a r_a$$

Използваме и закона за запазване на енергията, написан за случая на движение на леко тяло около неподвижен обект с маса, равна на сумата от масите на звездата и пулсара:

$$\frac{v_p^2}{2} - \frac{\gamma(M_p + M_s)}{r_p} = \frac{v_a^2}{2} - \frac{\gamma(M_p + M_s)}{r_a}$$

Оттук получаваме:

$$v_p = \sqrt{\frac{2\gamma(M_p + M_s)}{r_a + r_p} \cdot \frac{r_a}{r_p}} = \sqrt{\frac{\gamma(M_p + M_s)}{a} \cdot \frac{r_a}{r_p}}$$

Да означим с  $M_0$  масата на звездата-предшественик на пулсара преди експлозията. Тогава другата звезда се е движила около нея по кръгова орбита, като е била в сила следната зависимост:

$$v_p = \sqrt{\frac{\gamma(M_0 + M_s)}{r_p}}$$

От последните две равенства намираме:

$$M_0 = (M_p + M_s) \frac{r_a}{a} - M_s$$

$M_0 \approx 5$  слънчеви маси

Първоначалната маса на звездата, която е избухнала като свръхнова, е била 5 слънчеви маси. При превръщането си в пулсар тя е изгубила  $M_0 - M_p = 3.4$  слънчеви маси вещество.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

*За определяне на перицентралното и апоцентралното разстояние – 2 т.*

*За правилен начин за определяне на масата на пулсара – 3 т.*

*За верен числен резултат – 1 т.*

*За правилна обща физическа идея, обясняваща изменението на орбитата на звездата след експлозията – 2 т.*

*За правилна математическа постановка на решението – 6 т.*

*За верен числен резултат – 1 т.*

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА**  
**XVI НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ**

**Национален кръг, 14 април 2013 г., Кърджали**

**Възрастова група XI-XII клас – практически кръг – решения**

**Практическа задача. Двойната звезда SDSS J013851.54-001621.6. – вижте решението на задачата за 9-10 клас.**